**Problème 451 – L’enveloppe de la flamme olympique de Paris 2024**

**Niveaux : Terminale (Spécialité Maths)**

**Chapitres : Fonction exponentielle, Limites, Convexité  
Inédit, publié le 08/05/2024**



Allumée selon la tradition à Olympie en Grèce et arrivée en France à Marseille en ce 8 mai 2024, la flamme olympique des Jeux de Paris 2024 est transportée dans une torche dont le design a été confiée au français Mathieu Lehanneur. Faite d’acier, haute de 70 cm, large en son centre de 10 cm et de 3,5 cm à ses extrémités, elle est parfaitement symétrique tant horizontalement que verticalement. Dans ce problème, on va s’intéresser à la courbe de cette magnifique torche en essayant de la modéliser tant que possible avec une expression simple… pour montrer que ce n’est pas si évident !

On a repris en **Annexe** l’image de cette torche, et on l’a tournée horizontalement, pour la placer au centre d’un repère orthonormé où l’unité est le cm. On a tracé les deux courbes, symétriques l’une de l’autre par rapport à l’axe des abscisses, qui forment l’enveloppe de la flamme : on précise qu’on a, pour simplifier, ignoré volontairement la présence des petites légères ondelettes visibles à la surface dans la zone brillante.

Pour ce problème, on va uniquement se concentrer sur la courbe supérieure, notée, et on va essayer de trouver une expression simple de la fonction associée. Selon les données associées à la torche, on doit respecter, dans un premier temps, les contraintes suivantes :

- est symétrique par rapport à l’axe des ordonnées.

- (puisque la torche est large en son centre de 10 cm)

- (puisque la torche est large aux extrémités de 3,5 cm)

-

On admet que doit être continue et dérivable au moins deux fois sur

1) Montrer que .

2) En étudiant la limite en , montrer que ne peut pas être une fonction polynomiale.

3) On essaye d’exprimer sous la forme d’une fonction de la forme où est une constante et une fonction polynomiale.

a) Supposons qu’on a

Montrer qu’on peut se ramener à un cas équivalent de la forme où est une fonction polynomiale avec

b) On suppose que est de degré 1, c’est-à-dire de la forme avec .

En dérivant , montrer que est nul, et donc que est une fonction constante qui ne conviendrait pas.

c) On suppose maintenant que est de degré 2, donc de la forme avec

i. Montrer que .

ii. Montrer que , puis en déduire l’expression complète de .

4) Si on tente de tracer une courbe à partir de l’expression trouvée en 3.c), on peut trouver qu’elle est relativement proche de la courbe , sans toutefois être parfaite. On tente alors d’améliorer l’expression recherchée en remarquant que la courbe admet un point d’inflexion en .

Calculer à partir de l’expression trouvée en 3.c) et montrer que celle-ci ne respecte pas la condition supplémentaire.

5) a) En étudiant les limites en ou , montrer que si est de la forme , alors forcément le degré de est pair.

b) En déduire qu’une fonction de la forme , qui respecterait toutes les conditions énoncées, en y ajoutant celle de la question 4), ne pourrait convenir que si le degré de est pair et supérieur ou égal à 4.

**Annexe**

